

UNIVERZITET CRNE GORE

FAKULTET ZA POMORSTVO

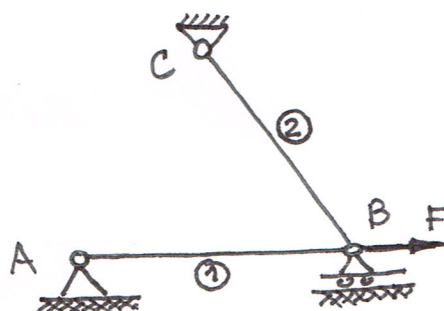
POMORSKE NAUKE

BRODOMAŠINSTVO

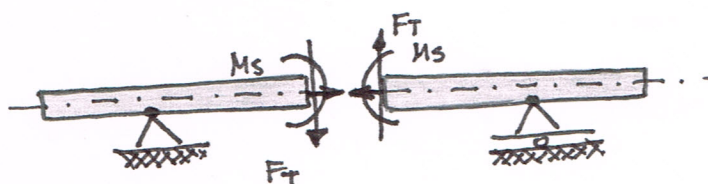
OTPORNOST MATERIJALA

= PISANA PREDAVANJA =

2. KOLOKVIJUM



OSNOVNI POJMOVİ IZ STATİKE



2016/17
2017/18

KOTOR 2012.

OSNOVNI POJMOVI IZ STATIKE

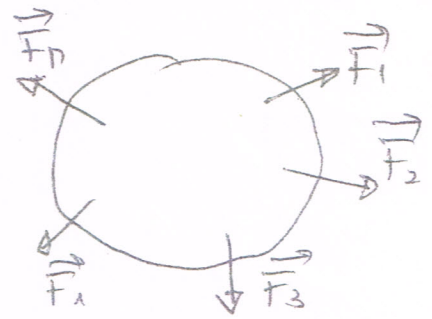
1. OSNOVNI POJMOVI

STATIKA JE NAUČNA DISCIPLINA KOJA SE BAVI PRO-
UČAVANJEM RAVNOSTEŽE TIJELOA POD DEJSTVOM SISTE-
MA SILA.

ZA TIJELO KAŽEMO DA JE U RAVNOSTEŽI AKO POD
DEJSTVOM SKUPA SILA MIRUJE.

SILA JE KOLIČINSKA MJERA MEĐUSOBNOG DEJSTVA
DVA TIJELOA. ZA NJENO POTPUNO DEFINISANJE JE PO-
TREBNO DA ZNAMO TRI PODATKA: INTENZITET, PRA-
VAC I SMJER, STO ZNAČI DA JE SILA VEKTORSKA VE-
LIČINA. OZNAČAVA SE SA $\vec{F}$ A NJEN INTENZITET SA F .

SISTEM SILA JE SKUP SILA ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$) KOJI DE-
JSTVUJE NA NEKO TIJELO (SL.)



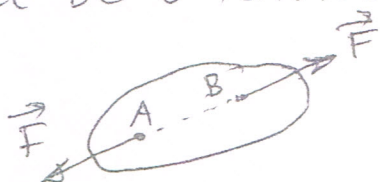
RAZLIKUJEMO RAZNE SI-
STEME SILA:

- SISTEM SUČEJNIH SILA
- SISTEM PARALELNIH SILA
- SISTEM SILA U JEDNOJ
RAVNI
- PROIZVOLJAN SISTEM SILA

KOD SISTEMA SUČEJNIH SILA PRAVCI DEJSTAVA
SVIH SILA SE PRESIJEČU U JEDNOJ TAČCI, DOK

SU IČOD SISTEMA PARALELNIH SILA SVE SILE MEĐUSOBNO PARALELNE. AKO SVE SILE LEŽE U JEDNOJ RAVNI ONDA SE RADI O SISTEMU SILA U RAVNI.

TJELO NA KOJE DEJSTVUJE SISTEM OD DVIJE SILE JE U RAVNOTEŽI (MIRUJE) SAMO AKO SU TE



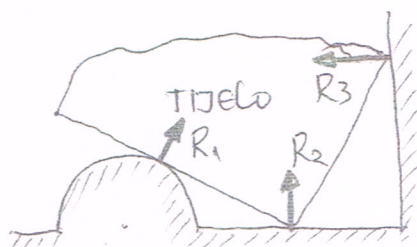
DVIJE SILE ISTOG PRAVCA, ISTOG INTENZITETA A SUPROTNOG SMJERA (SL.)

SLOBODNO (NEVEZANO) TIJELO JE ONO TIJELO KOJE DRUGA TIJELA NE SMETAJU DA ZAUZME PROIZVOLJAN POLOŽAJ U PROSTORU.

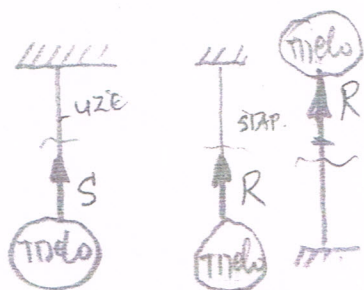
VEZANO (NESLOBODNO) TIJELO JE ONO TIJELO KOJE NEKO DRUGO TIJELO (VEŽA) ONEMOGUĆAVA DA SE POMIĆE U JEDNOM ILI VIŠE PRAVACA.

REAKCIJA VEŽE JE SILA KOJOM VEŽA DEJSTVUJE NA TIJELO NAKON NIEGOVOG OSLOBAĐANJA OD VEŽE. ONA IMA PRAVAC U KOJEM BI SE KREĆALO TIJELO KAD NEBI BILO VEŽE, A SMJER SUPROTAN OD SMJERA U KOJEM BI SE KREĆALO TIJELO KAD NEBI BILO VEŽE.

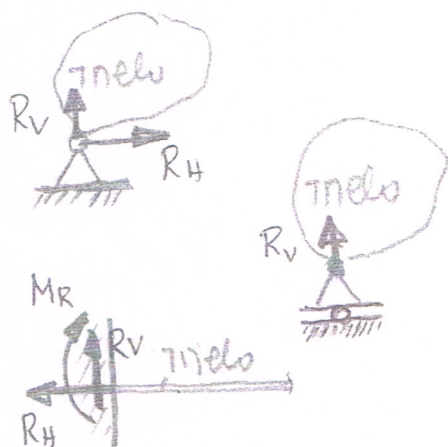
OSNOVNI TIPVI VEŽA SU: GLATAK PLOŠ, VJEŠ, ŠTAP, OSLOMOT (POKRETN I NEPOKRETN) I UKLJEŠTENJE. KOD GLATKE PLOŠI REAKCIJA VEŽE IMA



PRAVAC NORMALE NA PLOŠ UKO- LIKO JE PLOŠ RAVNA, A UOSTKO JE PLOŠ ZAKRIVLJENA IMA PRAVAC NORMALE NA TANGENTNU RAVAN POUČEKU KROZ TAČU KONTAKTA (SL.). KOD VJEŠA I ŠTAPA



REAKCIJA VEŽE IMA PRAVAC VJEŠA ODNOSNO ŠTAPA I USMJE- RENA JE KA TAČU VEŽIVANJA VJEŠA A KOD ŠTAPA MOGU BITI OBA SMJE- RA (SL.)



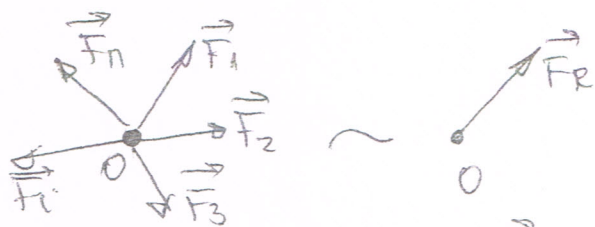
KOD NEPOKRETNOS OSLOMCA DNE-
MOGUĆENO JE POMJERANJE TIJE-
LA U HORIZONTALNOM I U VERTI-
KALNOM PRAVCU PA U TIM PRA-
VCIMA POSTOJE I REAKCIJE VEŽA.
KOD POKRETNOS OSLOMCA PO-
STOJI SAMO JEDNA REAKCIJA
VEŽE I TO U PRAVCU U KOJEM

JE SPRJEĆENO POMJERANJE. KOD UKLJESTENJA JE
PORED POMJERANJA U HORIZONTALNOM I U VERTI-
KALNOM PRAVCU SPRJEĆENO I OBRĆANJE TIJELA
PA SE KAO REAKCIJA POJAVLJUJE I Tzv. REAKTIVNI
MOMENT.

SVAKO VEŽANO TIJELO SE MOŽE UČINITI SLOBOD-
NIM (NEVEŽANIM) AKO ODBACIMO VEŽE I UMJE-
STO NJIH PRIKAŽEMO REAKCIJE VEŽE TI. SILE KOJIMA
VEŽE DEJSIVUJU NA POSMATRANO TIJELO.

2. SISTEM SUČEJNIH SILA

Pod sistemom sučelnih sila podrazumijeva
se skup sila sa osobinom da se pravci dejs-
va svih sila presijekaju u jednoj tački (sl.)
SABIRANJEM SILA PO
PRAVILIMA SABIRA-
NJA VEKTORA POČI-
NJI SISTEM SILA SE
SVODI NA JEDNU SI-



U Tzv. REZULTANTU $\vec{F}_R$ PRI ČEMU JE

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

REZULTANTA $\vec{F}_R$ SE MOŽE ODREDITI I ANALITIČKI.
POSTOJE

$$\vec{F}_1 = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j} + F_{1z}\vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j} + F_{2z}\vec{k}$$

$$\vec{F}_i = F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j} + F_{iz}\vec{k}$$

$$\vec{F}_n = F_{nx}\vec{i} + F_{ny}\vec{j} + F_{nz}\vec{k}$$

$$\vec{F}_R = F_{Rx}\vec{i} + F_{Ry}\vec{j} + F_{Rz}\vec{k}$$

TO je:

$$\begin{aligned} F_{Rx}\vec{i} + F_{Ry}\vec{j} + F_{Rz}\vec{k} &= (F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j} + F_{1z}\vec{k}) + (F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j} + F_{2z}\vec{k}) \\ &+ (F_{3x}\vec{i} + F_{3y}\vec{j} + F_{3z}\vec{k}) + \dots + (F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j} + F_{iz}\vec{k}) + \dots + (F_{nx}\vec{i} + F_{ny}\vec{j} \\ &+ F_{nz}\vec{k}) \end{aligned}$$

Dakle,

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{ix} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{iy} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy}$$

$$F_{Rz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{iz} + \dots + F_{nz} = \sum_{i=1}^n F_{iz}$$

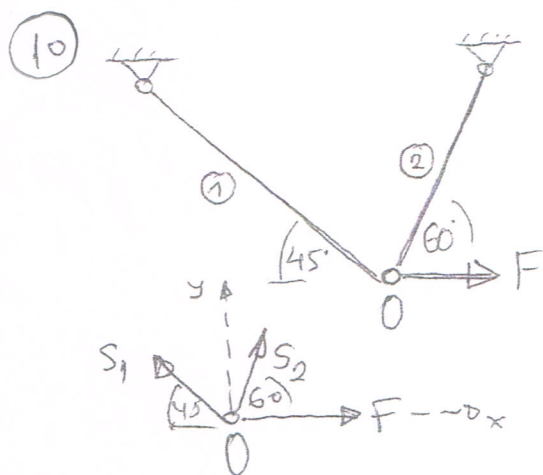
DA BI TAČKA (TIJELO) NA KOJU DEJSTVUJE SISTEM SUČEJNIH SILA MIROVA(A (BILA U RAVNOSTEŽI) NEOPHODNO JE DA JE $\vec{F}_R = F_{Rx}\vec{i} + F_{Ry}\vec{j} + F_{Rz}\vec{k} = 0$, ODNOSNO

$$F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{ix} + \dots + F_{nx} = 0$$

$$F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{iy} + \dots + F_{ny} = 0$$

$$F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{iz} + \dots + F_{nz} = 0.$$

PRIMJER: ZA SISTEME STAPOVA PRIKAZANE NA SLICI ODREDITI SILE U STAPOVIMA. DATO JE F.



UPOKOJO ZAMISLIMO DA IZ RAZMATRANJA IZBACIMO ŠTAPOVE ① I ② I DA O VEZE UMESTIMO NJIH NA TACUV O DEISTVUJU REAKCIJE VEZA S_1 I S_2 , TAKO DA NA TACUV O DEISTVUJE SISTEM OD TRI SUČELNE SILE: F , S_1 I S_2 (SL.)

POSTO POSMATRAMO SISTEM OD DVA ŠTAPA POD DEJSTVOM SILE F MIRUJE TO JE U RAVNOUTEŽI I SAMO TACVA O STO ZNAČI DA MORAJU BITI ZADOVOLJENI USLOVI RAVNOUTEŽE

$$\sum F_{ix} = 0: F + S_2 \cdot \cos 60^\circ - S_1 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0: S_2 \cdot \cos 30^\circ + S_1 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

RIESAVANJEM PRETHODNIH JEDNACINA DOBIJAMO

$$S_2 = -S_1 \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -S_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

ODNOSNO

$$F + \left(-S_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{1}{2} - S_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

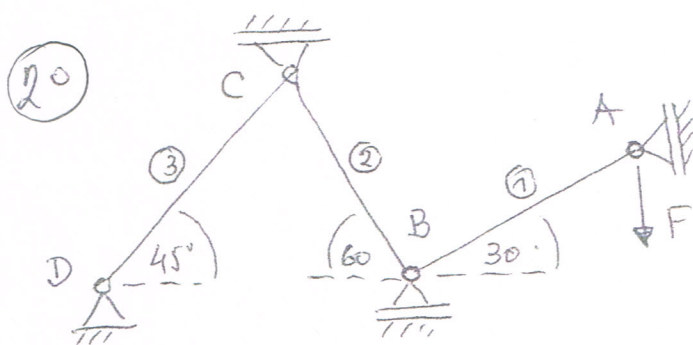
PA JE

$$S_1 = \frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}} \cdot F$$

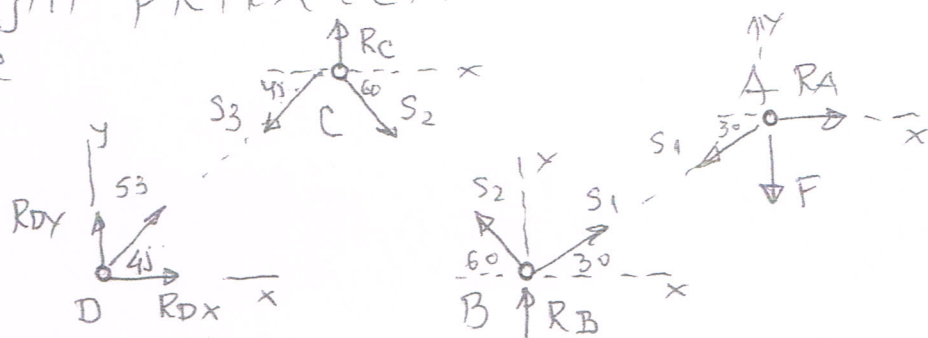
ODNOSNO

$$S_2 = -\frac{2}{1+\sqrt{3}} F$$

ZNAK "-" ZNAČI DA JE SMJER SILE S_2 POGREŠNO PREDPOSTAVLJEN.



U čvorovima A, B, C i D se pojavljuju sistemi sučelnih sila, koje nastaju kada čvorove oslobodimo od veza i umjesto njih prikazemo sile tj. reakcije. Tada je



Iz uslova ravnoteže za pojedine čvorove dobijamo jednačine (ima ih $4 \times 2 = 8$) iz kojih odredimo nepoznate veličine: $S_1, S_2, S_3, R_A, R_B, R_C, R_{Dx}$ i R_{Dy} , pri čemu se reakcije u osloboćima R_A, R_B, R_C, R_{Dx} i R_{Dy} ne traže za datkom. Dakle

$$\textcircled{A} \quad \sum F_x = 0: R_A - S_1 \cos 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0: -F - S_1 \cos 60^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\textcircled{B} \quad \sum F_x = 0: S_1 \cos 30^\circ - S_2 \cos 60^\circ = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_y = 0: R_B + S_1 \cos 60^\circ + S_2 \cos 30^\circ = 0 \quad (4)$$

$$\textcircled{C} \quad \sum F_x = 0: S_2 \cos 60^\circ - S_3 \cos 45^\circ = 0 \quad (5)$$

$$\sum F_y = 0: R_C - S_2 \cos 30^\circ - S_3 \cos 45^\circ = 0 \quad (6)$$

$$\textcircled{D} \quad \sum F_x = 0: R_{Dx} + S_3 \cos 45^\circ = 0 \quad (7)$$

$$\sum F_y = 0: R_{Dy} + S_3 \cos 45^\circ = 0 \quad (8)$$

Iz JEDNACINA (2), (3) i (5) NAHAZIMO SILE U STAPOVIMA

$$Iz (2): S_1 = -\frac{F}{\cos 60} = -2F$$

$$Iz (3): S_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - S_2 \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow S_2 = -2\sqrt{3}F$$

$$Iz (5): S_2 \cdot \frac{1}{2} - S_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_3 = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot F$$

Iz preostalih pet jednacina NAHAZIMO NEPOZNATE REAKCIJE

$$Iz (1): R_A = S_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}F$$

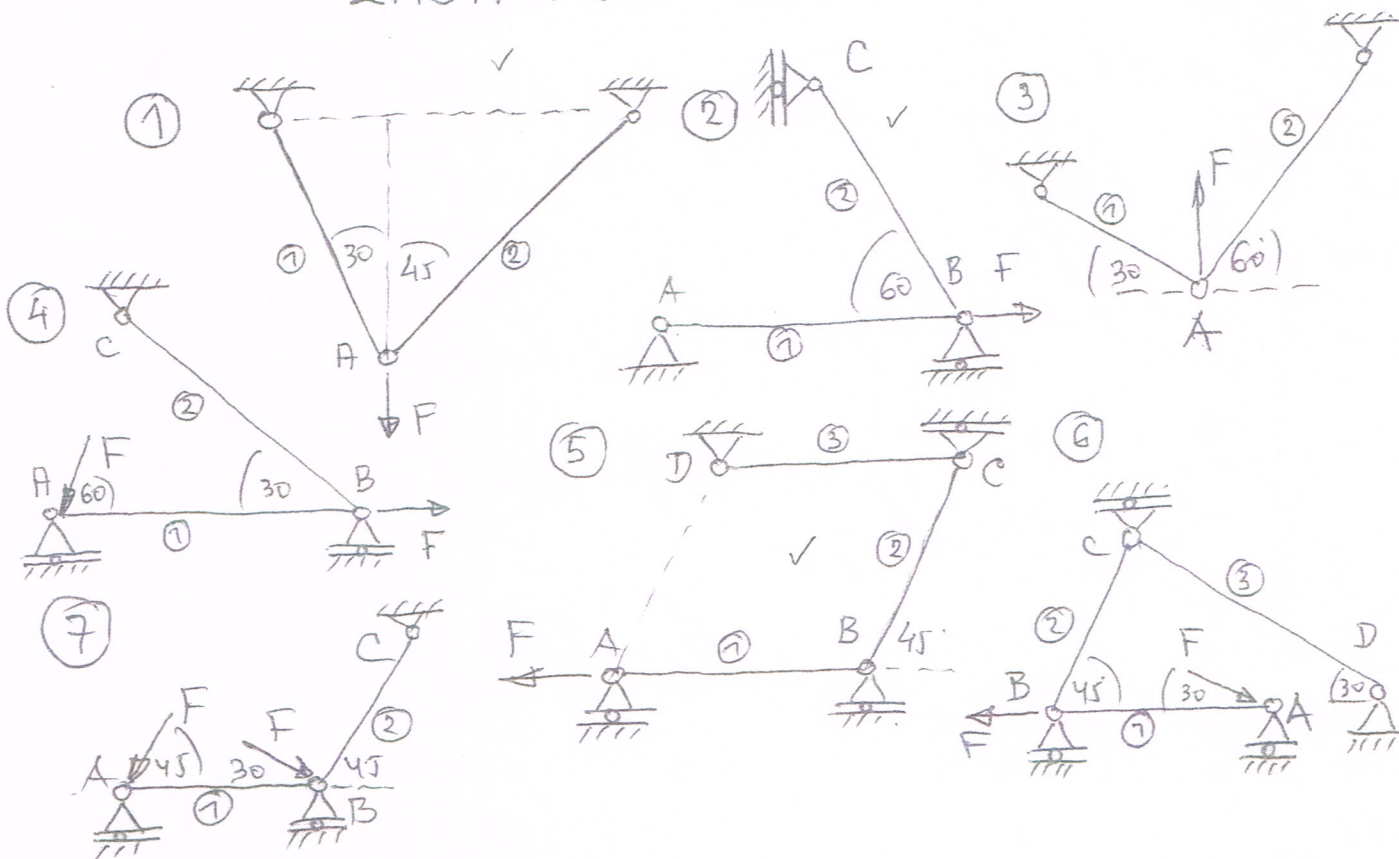
$$Iz (4): R_B = -S_1 \cdot \frac{1}{2} - S_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = F + 3F = 4F$$

$$Iz (6): R_C = S_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + S_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -3F - \sqrt{3}F = -(3+\sqrt{3})F$$

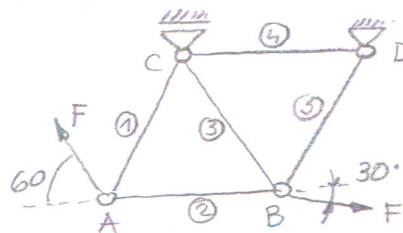
$$Iz (7): R_{Dx} = -S_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}F$$

$$Iz (8): R_{Dy} = -S_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}F$$

ZADACI ZA VJEZBANJE



ZA SISTEM ŠTAPOVA OPTEREĆEN KAO NA SLICI ODREDITI SILE U ŠTAPOVIMA, POZNATO JE F . DUŽINE ŠTAPOVA SU ISTE



A:

$$\sum F_y = 0 \quad \frac{F\sqrt{3}}{2} - S_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{S_1 = F}$$

$$\sum F_x = 0 \quad \frac{F}{2} + S_1 \cdot \frac{1}{2} - S_2 = 0 \Rightarrow \boxed{S_2 = F}$$

B:

$$\sum F_x = 0 \quad -S_3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - S_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + F = 0 \quad S_3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = F - S_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{S_3 = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} F}$$

$$\sum F_y = 0 \quad S_5 + S_3 \cdot \frac{1}{2} - S_2 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$S_5 = \frac{1}{2} (S_2 - S_3) = \frac{1}{2} \left(F - \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} F \right) \Rightarrow \boxed{S_5 = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} F}$$

C:

$$\sum F_x = 0 \quad -S_4 + S_1 \cdot \frac{1}{2} + S_3 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

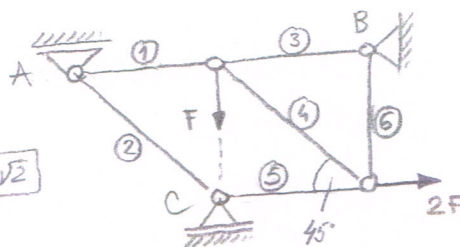
$$S_4 = \frac{1}{2} (S_1 + S_3) = \frac{1}{2} \left(F + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} F \right) \Rightarrow \boxed{S_4 = \frac{F}{\sqrt{3}}}$$

$$\sum F_y = 0 \quad -R_c + S_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - S_3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$R_c = \frac{\sqrt{3}}{2} (S_1 - S_3) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(F - \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} F \right)$$

$$R_c = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{2F\sqrt{3} - 2F}{\sqrt{3}} \right) \Rightarrow \boxed{R_c = -(2 - \sqrt{3})F}$$

ZA REŠETKU PRIKAZANU NA SLICI 1 OPTEREĆENU KAO NA SLICI ODREDITI SILE U ŠTAPOVIMA. POZNATO JE F .



D:

$$\sum F_y = 0 \quad S_4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + F = 0 \Rightarrow \boxed{S_4 = F\sqrt{2}}$$

E:

$$\sum F_x = 0 \quad -S_5 + S_4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + F = 0 \Rightarrow S_5 = S_4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + F \Rightarrow \boxed{S_5 = 3F}$$

$$\sum F_y = 0 \quad S_6 - S_4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{S_6 = F}$$

C:

$$\sum F_x = 0 \quad -S_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + S_5 = 0 \quad S_2 = \sqrt{2} \cdot S_5 \Rightarrow \boxed{S_2 = 3\sqrt{2}F}$$

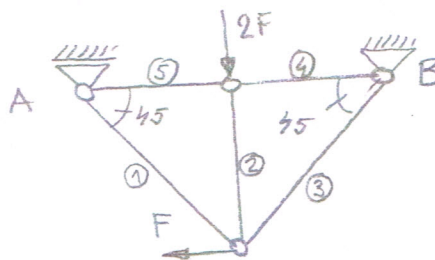
$$(\sum F_y = 0 \quad R_c = S_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{R_c = 3F})$$

A:

$$\sum F_x = 0 \quad S_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - S_1 = 0 \Rightarrow \boxed{S_1 = 3F}$$

$$(\sum F_y = 0 \quad R_A - S_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow R_A = 3\sqrt{2}F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{R_A = 3F})$$

ZA REŠETKU PRIKAZANU NA SLICI
ODREDITI SILE U ŠTAPOVIMA. PO-
ZNATO JE F



D:

$$\sum F_y = 0 \quad S_2 - 2F = 0 \quad \boxed{S_2 = 2F}$$

C:

$$\sum F_y = 0 \quad S_1 - S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + F \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\boxed{S_1 = F \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\sum F_x = 0 \quad S_3 - S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - F \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{S_3 = 3F \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

A:

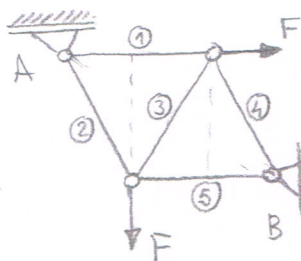
$$\sum F_x = 0 \quad -S_5 + S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad S_5 = F \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \boxed{S_5 = F}$$

$$(\sum F_y = 0 \quad -R_A - S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \boxed{R_A = -F})$$

D:

$$\sum F_x = 0 \quad -S_4 + S_5 = 0 \Rightarrow S_4 = S_5 \Rightarrow \boxed{S_4 = F}$$

ODREDITI SILE U ŠTAPOVIMA.
POZNATO JE F



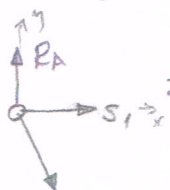
ČVOR C:

$$\sum F_y = 0 \quad -S_3 \frac{\sqrt{3}}{2} - S_4 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \boxed{S_3 = -S_4}$$

$$\sum F_x = 0 \quad F - S_1 - S_3 \frac{1}{2} + S_4 \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow F - S_1 + S_4 = 0 \quad \text{ili} \quad F - S_1 - S_3 = 0$$

$$\boxed{S_1 = F - S_3}$$

ČVOR A

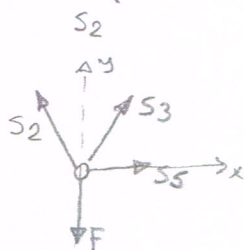


$$\sum F_x = 0 \quad S_1 + S_2 \frac{1}{2} = 0$$

$$\boxed{S_2 = -2S_1}$$

$$\boxed{S_2 = -2(F - S_3) = -2F + 2S_3}$$

ČVOR D



$$\sum F_y = 0 \quad S_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + S_3 \frac{\sqrt{3}}{2} - F = 0 \quad S_2 + S_3 = \frac{2F}{\sqrt{3}}$$

$$-2F + 2S_3 + S_3 = \frac{2F}{\sqrt{3}}$$

$$3S_3 = \frac{2F}{\sqrt{3}} + 2F \Rightarrow$$

$$\boxed{S_3 = \frac{2F}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \right)}$$

$$S_2 = -2F + 2 \cdot \frac{2F}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \right) = -2F + \frac{4F}{3\sqrt{3}} + \frac{4F}{3} = \frac{4F}{3\sqrt{3}} - \frac{2F}{3}$$

$$\boxed{S_2 = \frac{2F}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right)}$$

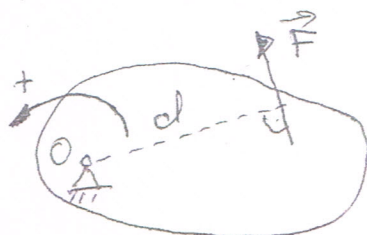
$$S_1 = -\frac{S_2}{2} \Rightarrow \boxed{S_1 = \frac{F}{3} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \right)}$$

$$S_4 = -S_3 \Rightarrow \boxed{S_4 = -\frac{2F}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \right)}$$

$$\sum F_x = 0 \quad S_5 + S_3 \frac{1}{2} - S_2 \frac{1}{2} = 0 \quad S_5 = \frac{S_2 - S_3}{2} \Rightarrow \boxed{S_5 = \frac{F}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 2 \right)}$$

3. PROIZVODYAN SISTEM SILA U RAVNI

Pod momentom sile $\vec{F}$ za osu p koja je normalna na ravan papira i prolazi kroz tačku O (sl.) u oznaci M_O^F podrazumijeva se proizvod sile i najkraceg rastojanja d od pravca dejstva sile do tačke O tj.



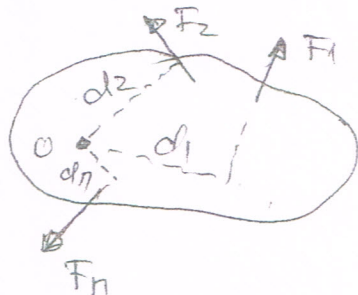
sile i najkraceg rastojanja d od pravca dejstva sile do tačke O tj.

$$M_O^F = F \cdot d$$

Pod dejstvom sile $\vec{F}$ tj.

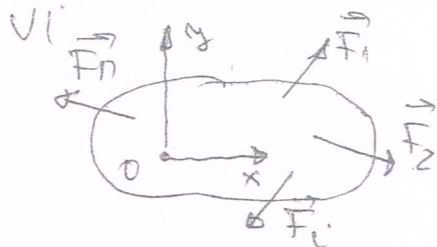
niemo momenta tijelo će se obrtati oko posmatrane ose odnosno tačke. Za pozitivan moment odnosno smjer obrtanja usvojicemo smjer suprotan od smjera obrtanja kazaljke na satu. Ukoliko pravac dejstva sile prolazi kroz tačku O moment je jednak nuli tj. $M_O^F = 0$ jer je najkrace rastojanje $d = 0$.

Pod momentom skupa sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ za osu p odnosno tačku O podrazumijeva se suma momenta od pojedinih sila tj.



$$\begin{aligned} M_O^{(F_1, F_2, \dots, F_n)} &= M_O^{F_1} \pm M_O^{F_2} \pm \dots \pm M_O^{F_n} \\ &= F_1 d_1 \pm F_2 d_2 \pm \dots \pm F_n d_n \end{aligned}$$

Tijelo na koje dejstvuje proizvoljan sistem sila u ravni (sl.) bilo u ravnotezi (mirovanje) neophodno je da su zadovoljeni sledeci uslo.



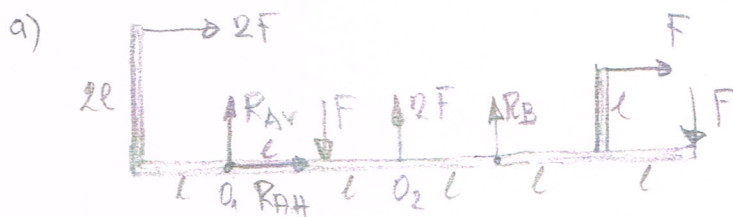
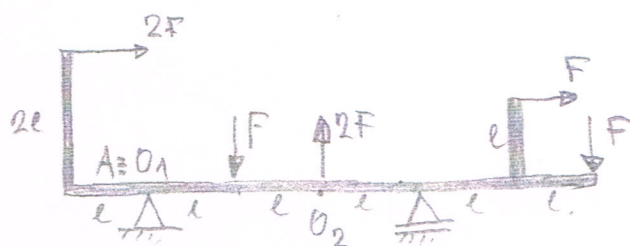
$$\begin{aligned} F_{1x} \pm F_{2x} \pm \dots \pm F_{nx} &= \sum F_{ix} = 0 \\ F_{1y} \pm F_{2y} \pm \dots \pm F_{ny} &= \sum F_{iy} = 0 \\ M_O^{F_1} \pm M_O^{F_2} \pm \dots \pm M_O^{F_n} &= \sum M_O^F = 0 \end{aligned}$$

PRVA DVA USLOVA, UKOLIKO SU ZADOVOLJENA OBE-
ZBEĐUJU DA NEMA TRANSLATORNOG POMIĆANJA
TIJELA U HORIZONTALNOM I VERTIKALNOM PRAVCU,
DOK TREĆI USLOV UKOLIKO JE ZADOVOLJEN OBE-
ZBEĐUJE DA NEMA OBRATANJA POSMATRANOG TI-
JELA.

PRIMJER: ZA TIJELO OBLIKA GREDE (GREĐNI NOSAČ)
KOJE JE OPTEREĆENO SILAMA KAO NA SLICI:

- OSLOBODITI GA OD VEŽA (OSLONACA) I PRIKAZATI
SILE (REAKCIJE VEŽA)
- IZRAČUNATI SUME: HORIZONTALNIH SILA, VERTI-
KALNIH SILA I SUME MOMENATA ZA TAČKE O_1, O_2
- ODREDITI REAKCIJE U OSLONCIMA TAKO DA BUDU
ZADOVOLJENI USLOVI RAVNOSTEŽE.
DATO JE F, l .

10



$$\begin{aligned} \sum F_{H} &= 2F + F + R_{AH} \\ \sum F_{V} &= R_{AV} - F + 2F + R_B - F \\ \sum M_{O_1} &= 2F \cdot 2l + R_B \cdot 3l - F \cdot l - F \cdot l - F \cdot 5l - 2F \cdot 2l \\ \sum M_{O_2} &= 2F \cdot 2l - R_B \cdot l + F \cdot l + F \cdot 3l - F \cdot l + R_{AV} \cdot 2l \end{aligned}$$

- DA BI GREĐNI NOSAČ BIO U RAVNOSTEŽI POD

DEJSTVOM POSMATRANOG SISTEMA SICA NEOPHODNO JE DA SU ZADDOVOLJENI SLJEDECI USLOVI

$$\sum F_{iH} = 0; \sum F_{iV} = 0; \sum M_A = 0$$

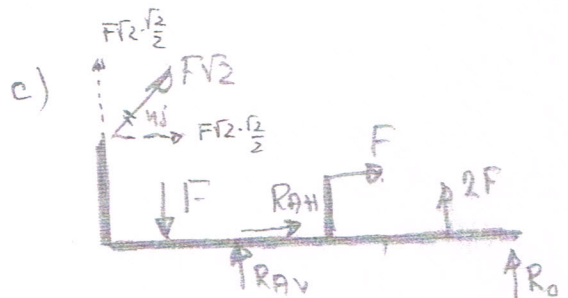
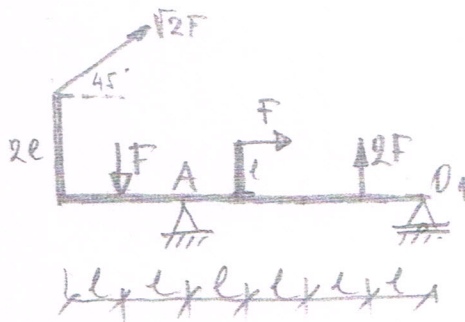
PA JE

$$2F + F + R_{AH} = 0 \Rightarrow R_{AH} = -3F$$

$$R_{AV} - F + 2F + R_B - F = 0 \Rightarrow R_{AV} = -\frac{7}{3}F$$

$$2F \cdot 2l + R_B \cdot 3l - Fl - Fl - F \cdot 5l - 2F \cdot 2l = 0 \Rightarrow R_B = \frac{7}{3}F$$

2°



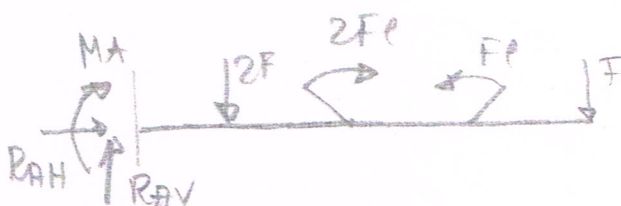
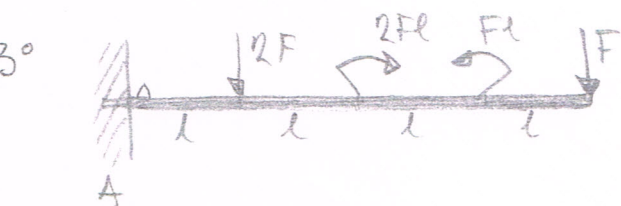
$$\sum F_{iH} = 0: R_{AH} + F + \sqrt{2}F \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0 \Rightarrow R_{AH} = -2F$$

$$\sum F_{iV} = 0: R_{AV} + R_D + 2F - F + F\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow R_{AV} = -\frac{5}{2}F$$

$$\sum M_A = 0: R_D \cdot 4l + 2F \cdot 3l - Fl + Fl - \sqrt{2}F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2l - \sqrt{2}F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2l = 0$$

$$\Rightarrow R_D = \frac{F}{2}$$

3°



$$\sum F_{iH} = 0: R_{AH} = 0$$

$$\sum F_{iV} = 0: R_{AV} - 2F - F = 0$$

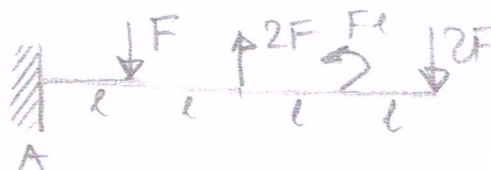
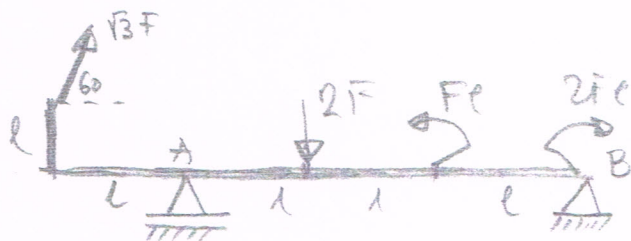
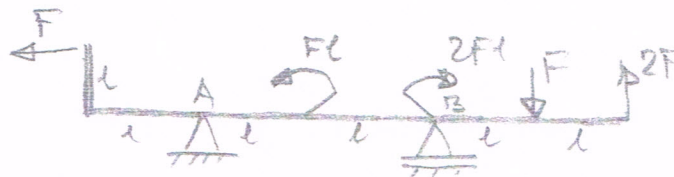
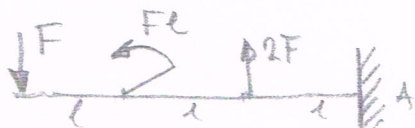
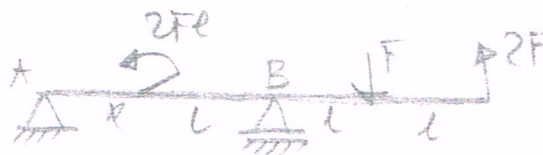
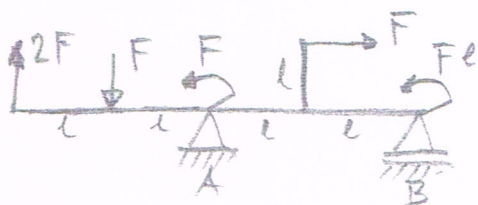
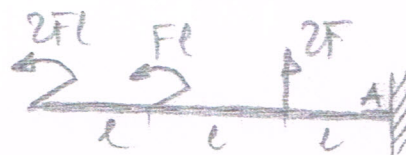
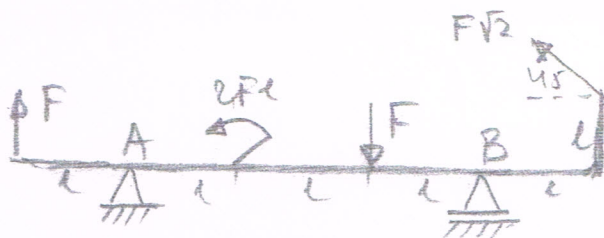
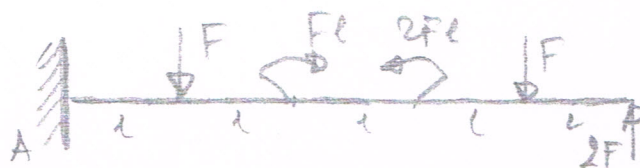
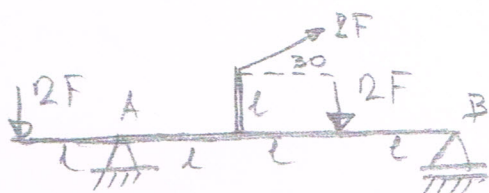
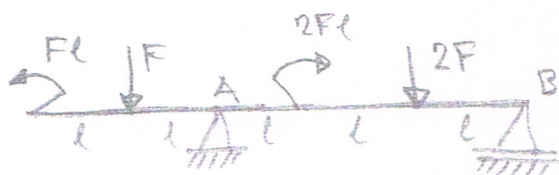
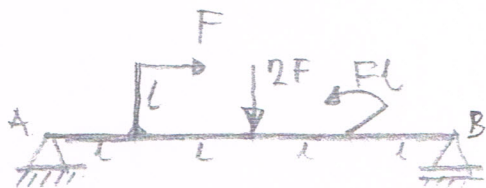
$$\Rightarrow R_{AV} = 3F$$

$$\sum M_A = 0: Fl - 2Fl - F \cdot 4l - 2Fl - M_A = 0$$

$$\Rightarrow M_A = 7Fl$$

ZADACI ZA VJEŽBANJE

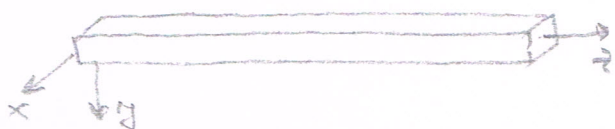
ZA GREDNE NOSAČE OPTEREĆENE KAO NA SLICI
ODREDITI REAKCIJE U VEŽAMA. DATO JE F I l .



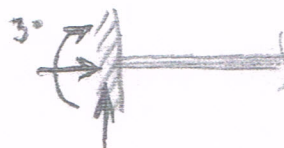
4. STATIČKI DIJAGRAMI KOD GREDNIH NOSAČA

Pod grednim nosačem (GREDDM) podrazumijeva se tijelo kod koga su dvije dimenzije (dimenzije poprečnog presjeka) male u odnosu na dužinu nosača (sl.).

Poprečni presjek nosača može biti različitog oblika: pravougaoni, kvadratni, kružni, trouglasti...

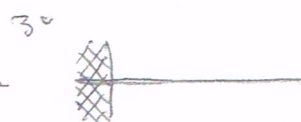


Gredni nosači mogu na različite načine da budu vezani za podlogu ili za neko drugo tijelo. Osnovne vrste veza kod grednih nosača su: pokretni oslonac, nepokretni oslonac i učestvenje kao na slici. Na slici su prikazane i reakcije

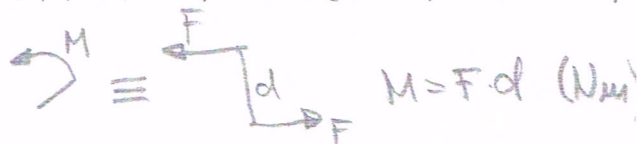
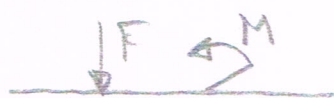


koje se pojavljuju u obliku jedne sile, dvije sile i dvije sile i reakcijskog momenta

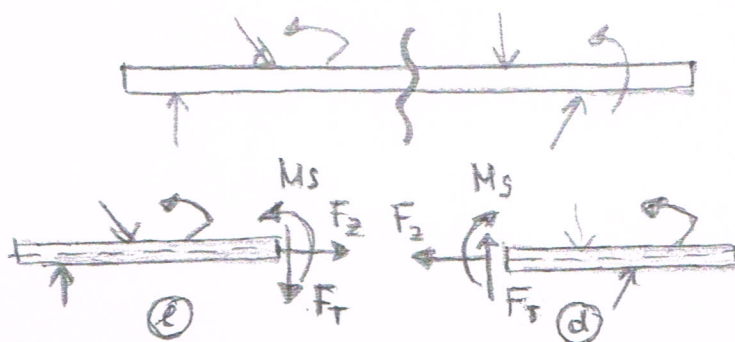
Osnovni oblici grednih nosača su: prosta greda, greda sa prepuštima i konzola (sl.).



Opterećenje sa kojim je opterećen gredni nosač najčešće se pojavljuje u obliku koncentrisane sile ili koncentrisanog momenta (sprega)



POD UNUTRAŠNJIH SILAMA I UNUTRAŠNJIH MOMENTOM U PROIZVOLJNO UODENOM POPREČNOM PRESTJEKU GREDNOG NOSAČA PODRAZUMIJEVAMO: AKSIJACNU SILU F_2 , TRANSVERZALNU (POPREČNU) SILU F_T I MOMENT SAVIJANJA M_s (sl.)



AKSIJACNA (UZDUŽNA) SILA F_2 U UODENOM PRESTJEKU NOSAČA JEDNAKA JE ZBIRU AKSIJACNIH SILA SA LIJEVE ILI SA DESNE STRANE OD UODENOG PRESTJEKA, Tj.

$$F_2 = \sum F_{i2}^l = \sum F_{i2}^d$$

TRANSVERZALNA (POPREČNA) SILA F_T U UODENOM PRESTJEKU NOSAČA JEDNAKA JE ZBIRU (SUMI) SVIH POPREČNIH SILA SAMO SA LIJEVE ILI SAMO SA DESNE STRANE NOSAČA U ODNOSU NA UODENI PRESTJEK, Tj.

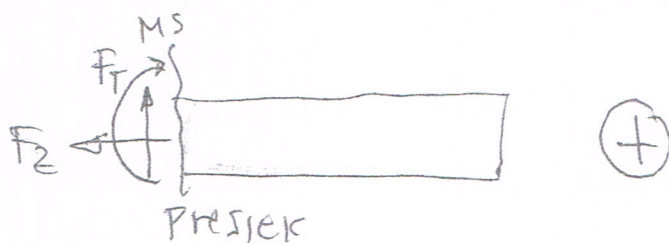
$$F_T = \sum F_{iT}^l = \sum F_{iT}^d$$

MOMENT SAVIJANJA M_s U UODENOM POPREČNOM PRESTJEKU NOSAČA JEDNAK JE ZBIRU MOMENATA ZA MJEŠTO PRESTJEKA OD SILA SAMO SA LIJEVE ILI SAMO SA DESNE STRANE U ODNOSU NA UODENI PRESTJEK, Tj.

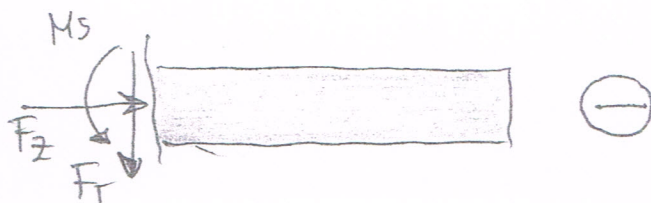
$$M_s = \sum M_{is}^l = \sum M_{is}^d$$

VAŽI SLJEDEĆI DOGOVOR ZA ZNAKE UNUTRAŠNJIH

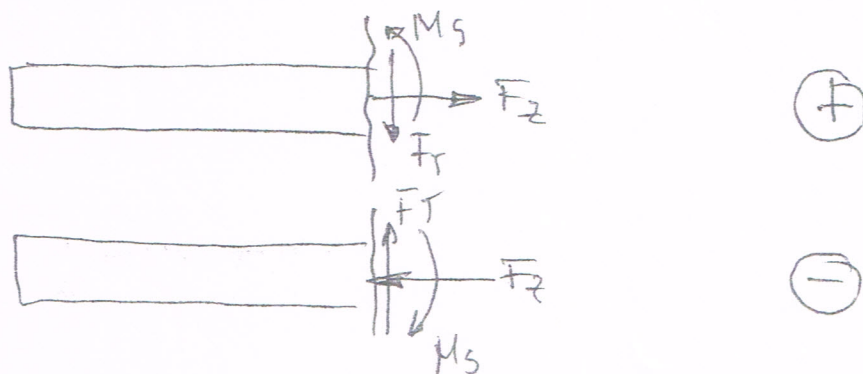
SILA I MOMENTA: AKO UNUTRAŠNJE SILE I MOMENTI RAČUNAMO SA LIJEVE STRANE U ODNOSU NA PRESJEK ONDA SE ZA POZITIVNE SMATRAJU ONE KOJE IMAJU SMJEROVE KAO NA SLICI



A NEGATIVNE SU ONE KOJE IMAJU SMJEROVE SUPROTNE OD KJIH TI.



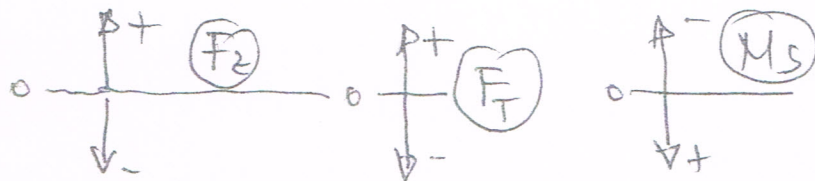
AKO PAK UNUTRAŠNJE SILE I MOMENTI RAČUNAMO SA DESNE STRANE U ODNOSU NA VOĐENI PRESJEK POZITIVNE I NEGATIVNE UNUTRAŠNJE SILE I MOMENTI SU PRIKAŽANI NA SLJEDEĆOJ SLICI



AKO VRIJEDNOSTI UNUTRAŠNJIH SILA F_Z , F_T I MOMENATA M_S RAČUNAMO ZA ODREĐEN BROJ KARAKTERISTIČNIH PRESJEKA NASTAJE I AKO TAKO DOBIVENE VRIJEDNOSTI SPOJIMO SA

ODREĐENIM LINIJAMA DOBICEMO DIAGRAME KOJI POKAZUJU KAKO SE F_z , F_T I M_s MIJENJAJU PO DUŽINI NOSAČA. TI DIAGRAMI SE JEDNIM IMENOM ZOVU STATIČKI DIAGRAMI.

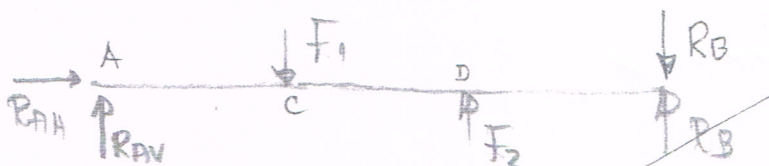
UOBICAJENO JE DA SE POZITIVNE VRIJEDNOSTI ZA F_z , F_T NANOSE NAVIŠE U ODNOSU NA NULTU LINIJU, DOK SE POZITIVNA VRIJEDNOST M_s -a NANOŠI NANIŽE U ODNOSU NA NULTU OSU. (SL.)



PRIMJER: ZA PROSTU GREDU OPTEREĆENU SILAMA $F_1 = 1\text{ kN}$ I $F_2 = 2\text{ kN}$ ODREĐITI REAKCIJE U OSLONCIMA A ZATIM NACRTATI STATIČKE DIAGRAME. DATO JE $l = 1\text{ m}$.



REAKCIJE U OSLONCIMA R_{AH} , R_{AV} I R_B ODREČUJEMO IZ TRI USLOVA RAVNOTEŽE KOJI MORAJU BITI ZADOVOLJENI



$$\sum F_H = 0: \boxed{R_{AH} = 0}$$

$$\sum M_A = 0: R_B \cdot 3l + F_2 \cdot 2l$$

$$- F_1 \cdot l = 0 \Rightarrow \boxed{R_B = -1\text{ kN}}$$

$$\sum F_V = 0: R_{AV} + R_B - F_1 + F_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{AV} = 0}$$

KARAKTERISTIČNI PRESJECI SU A, B, C, D. VRIJEDNOSTI UNUTRAŠNJIH SILA I MOMENATA U IGIMA SU:

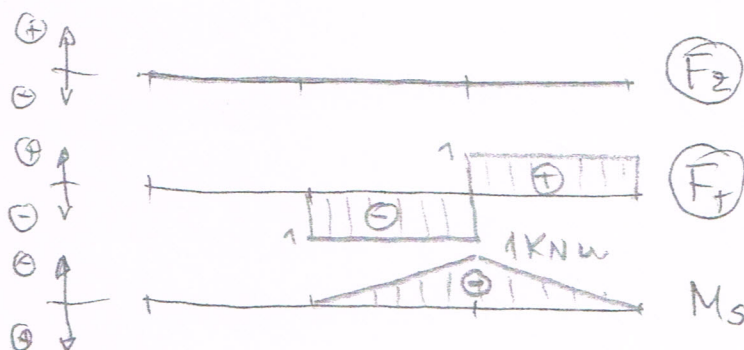
(A): $F_z = 0$ OZNAKE ② I ③ ODNOSE SE NA
 $F_T^{②} = 0$ PRESJEKE KOJI SU POVIŠENI MALO
 $F_T^{③} = R_{AV} = 0$ LIJEVO ODNOŠNO MALO DESNO U
 $M_s = 0$ ODNOŠU NA PRESJEK (A).

(C): $F_z = 0$
 $F_T^{④} = R_{AV} = 0$
 $F_T^{⑤} = R_{AV} - F_1 = -1 \text{ kN}$
 $M_s = R_{AV} \cdot l = 0$

(D): $F_z = 0$
 $F_T^{⑥} = R_{AV} - F_1 = -1 \text{ kN}$
 $F_T^{⑦} = R_{AV} - F_1 + F_2 = +1 \text{ kN}$
 $M_s = R_{AV} \cdot 2l - F_1 \cdot l = -1 \text{ kNm}$

(B): $F_z = 0$
 $F_T^{⑧} = R_{AV} - F_1 + F_2 = +1 \text{ kN}$
 $F_T^{⑨} = R_{AV} - F_1 + F_2 - R_B = 0$
 $M_s = 0$

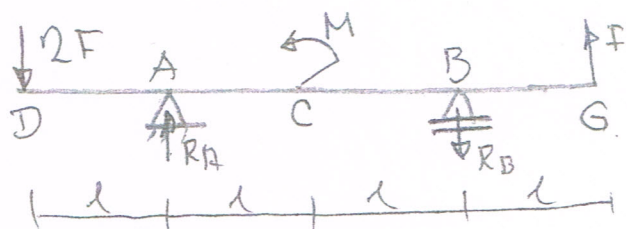
STATIČKI DIAGRAMI I MOGU IZGLED DAO NASL.



PRILIKOM CRTA-
 NJA DIAGRAMA
 VRIJEDNOSTI U
 POJEDINIM PRE-
 SJEKIMA TREBA
 SPAJATI PRAVIM
 LINIJAMA.

PRIMER ZAGREDU SA PREPUSITMA KOJA JE OPTEREĆENA KAO NA SLICI NAČI REAKCIJE U OSLOVCIMA I NAČRTATI STATIČKE DIAGRAME.

DATO JE: $F = 1 \text{ kN}$, $M = 1 \text{ kNm}$ i $l = 1 \text{ m}$.



REAKCIJE U OSLOVCIMA ODREĐUJEMO IZ USLOVA RAVNOSTEŽE

$$\sum F_{iv} = 0: R_A + F - 2F - R_B = 0$$

$$\sum M_A = 0: F \cdot 3l - R_B \cdot 2l + M + 2F \cdot l = 0$$

PA JE: $R_A = 4 \text{ kN}$ i $R_B = 3 \text{ kN}$.

① $F_T^{(D)} = 0$; $F_T^{(A)} = -2F = -2 \text{ kN}$; $M_S = 0$

② $F_T^{(A)} = -2F = -2 \text{ kN}$; $F_T^{(C)} = -2F + R_A = 2 \text{ kN}$; $M_S = -2F \cdot l = -2 \text{ kNm}$

③ $F_T = -2F + R_A = +2 \text{ kN}$; $M_S^{(C)} = -2F \cdot 2l + R_A \cdot l = 0 \text{ kNm}$

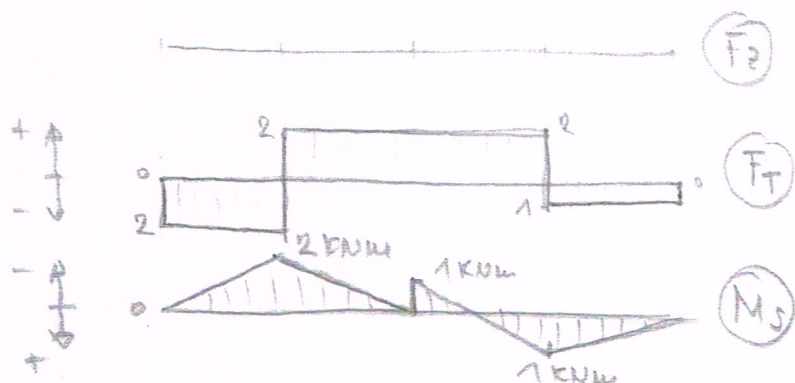
④ $M_S^{(B)} = -2F \cdot 2l + R_A \cdot l - M = -1 \text{ kNm}$

⑤ $F_T^{(B)} = -2F + R_A = 2 \text{ kN}$

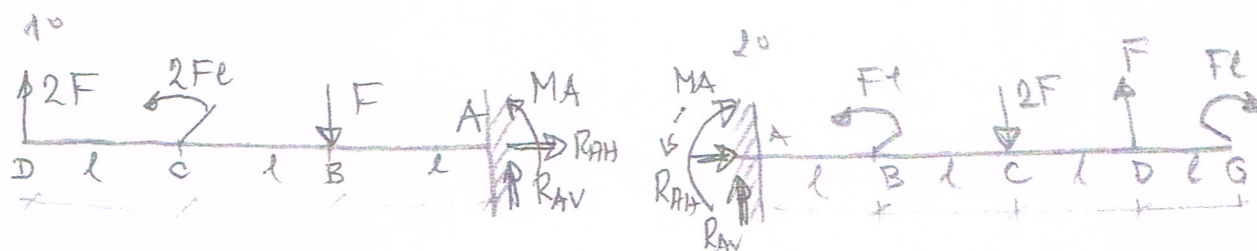
$F_T^{(G)} = -2F + R_A - R_B = -1 \text{ kN}$

$M_S = -2F \cdot 3l + R_A \cdot 2l - M = 1 \text{ kNm}$

⑥ $F_T^{(G)} = -2F + R_A - R_B = -1 \text{ kN}$ $F_T^{(G)} = 0$ $M_S = 0$



PRIMJER: ZA KONZOLU OPTEREĆENU IMAO NA SLICI ODREDITI REAKCIJE U UČESTENJU A ZATIM NACRTATI STATIČKE DIAGRAME. DATO JE: $F = 2 \text{ kN}$, $l = 1 \text{ m}$ i $M = 1 \text{ kNm}$.



1. REAKCIJE U UČESTENJU ODREĐUJEMO IZ USLOVA RAVNOSTEŽE:

$$\sum F_{iH} = 0 : \boxed{R_{AH} = 0}$$

$$\sum F_{iV} = 0 : R_{AV} + 2F - F = 0 \quad \boxed{R_{AV} = -2 \text{ kN}}$$

$$\sum M_A = 0 : M_A + Fl + 2F \cdot l - 2F \cdot 3l = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = 6 \text{ kNm}}$$

VRIEDNOSTI MOMENTA SAVIJANJA U IZRAČUNATIM PRESJECIMA SU:

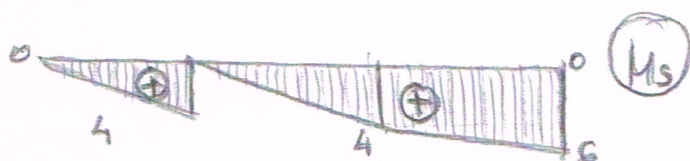
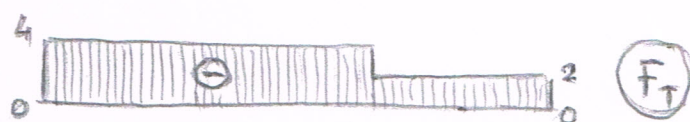
$$\textcircled{D} \quad M_S = 0$$

$$\textcircled{C} \quad M_S^{\textcircled{I}} = 2Fl = 4 \text{ kNm} ; M_S^{\textcircled{II}} = 2Fl - 2Fl = 0$$

$$\textcircled{B} \quad M_S^{\textcircled{I}} = M_S^{\textcircled{II}} = 2F \cdot 2l - 2Fl = 4 \text{ kNm}$$

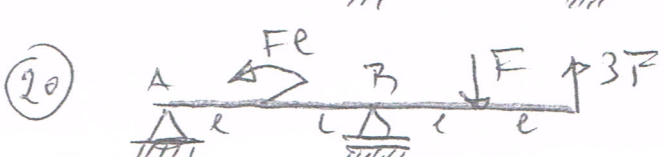
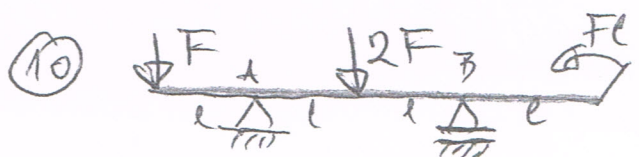
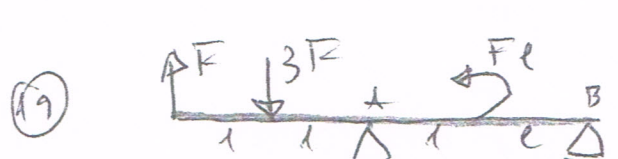
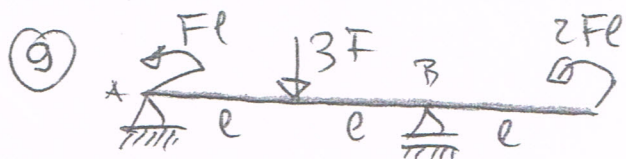
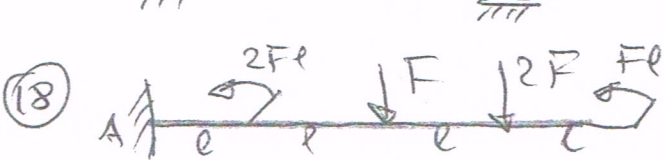
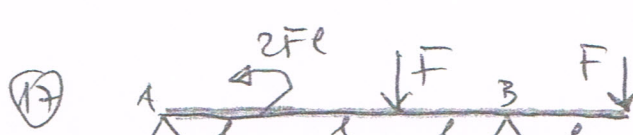
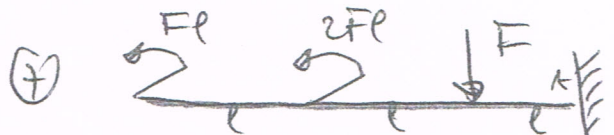
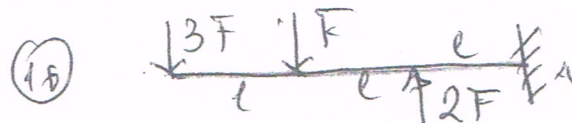
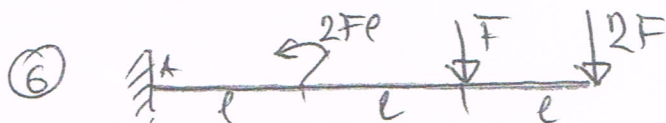
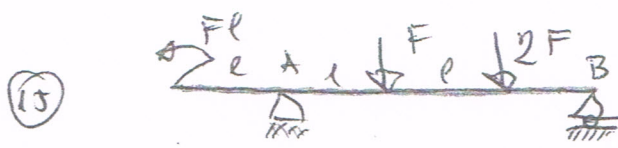
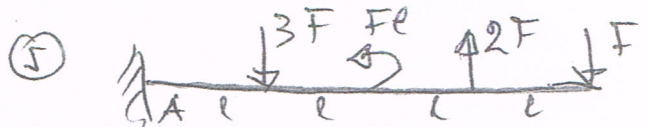
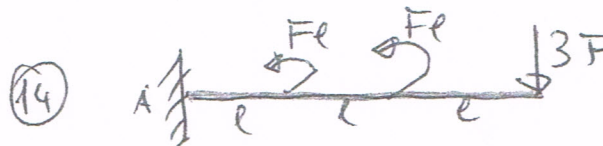
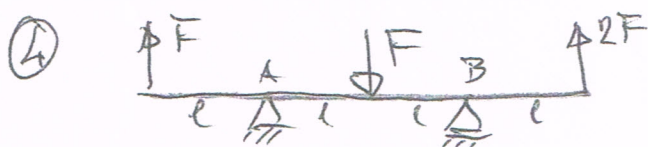
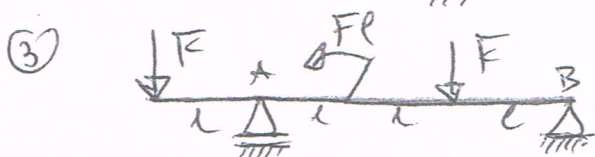
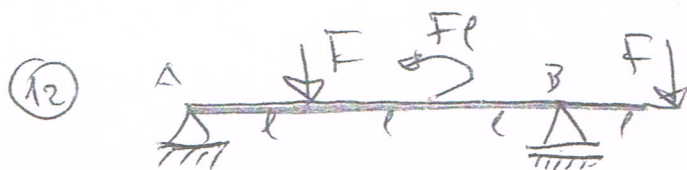
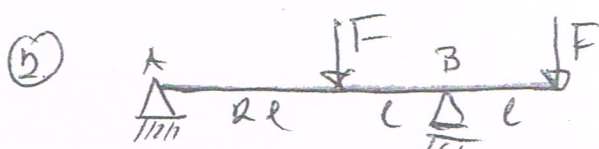
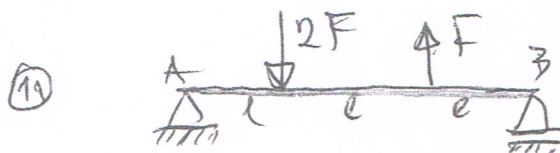
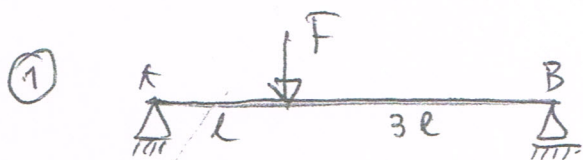
$$\textcircled{A} \quad M_S^{\textcircled{I}} = 2F \cdot 3l - 2Fl - Fl = 6 \text{ kNm}$$

$$M_S^{\textcircled{II}} = 0 = 2Fl - 2Fl - Fl - M_A$$



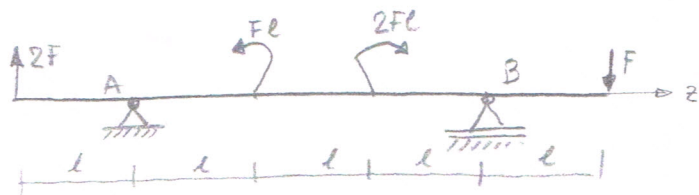
ZADACI ZA VJEŠBANJE

ZA GREĐNE NOSAČE OPTEREĆENE KAO NA SLICI NACRTATI STATIČKE DIAGRAME. DATO JE F I l .



ODREDITI REAKCIJE I NACRTATI
STATIČKE DIJAGRAME ZA GEODU
PRIKAZANU NA SLICI
DATO JE: F i l

(10)



REAKCIJE OSLOVNACA

$$\sum F_v = 0$$

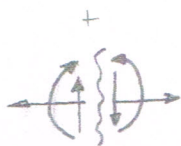
$$2F + R_A + R_B - F = 0$$

$$R_A + R_B + F = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$R_B \cdot 3l + Fl - 2Fl - 4Fl + 2Fl = 0$$

$$R_B = \frac{7F}{3} \quad R_A = -F - \frac{7F}{3} = -\frac{10F}{3} = R_A$$



ČETANJE DIJAGRAMA

$$\sum M_E^L = 0$$

$$\sum M_A^L = 2Fl$$

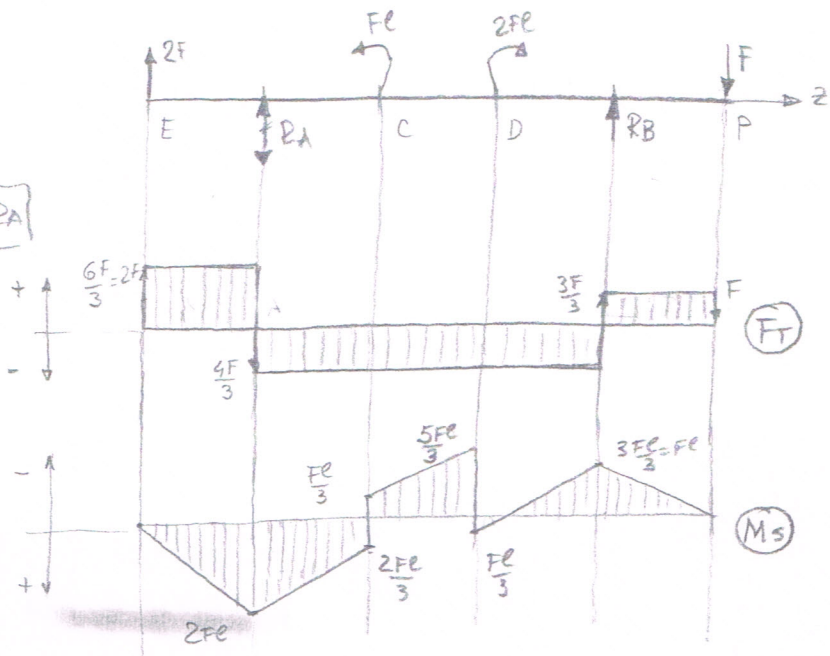
$$\sum M_C^L = 2F \cdot 2l - \frac{10F}{3} \cdot l = \frac{2Fl}{3}$$

$$\sum M_D^L = \frac{2Fl}{3} - Fl = -\frac{Fl}{3}$$

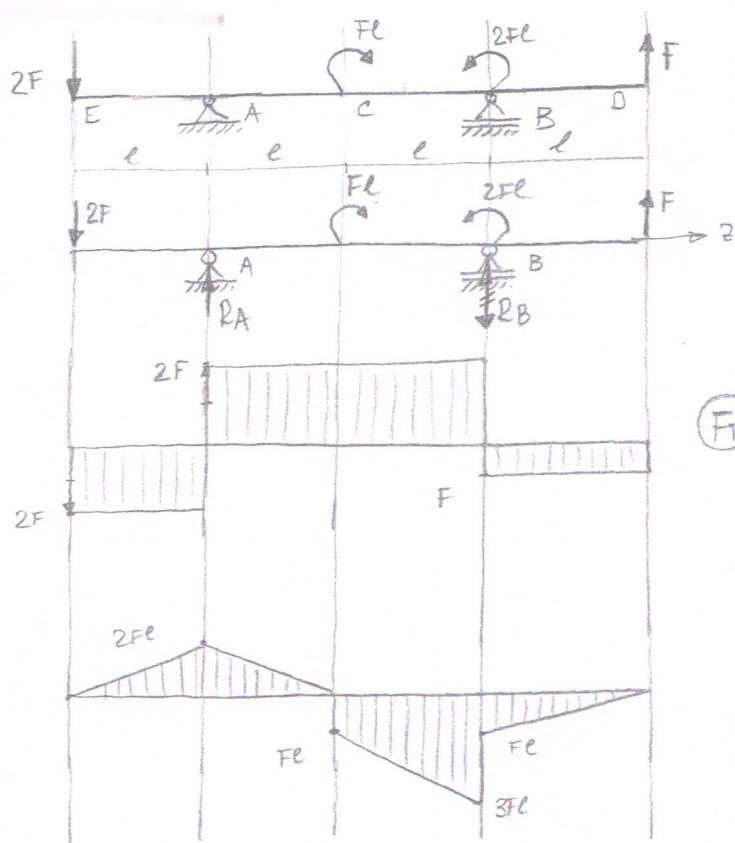
$$\sum M_B^L = 2F \cdot 3l - R_A \cdot 2l - Fl = -\frac{5Fl}{3}$$

$$\sum M_B^d = -Fl$$

$$\sum M_D^d = -F \cdot 2l + \frac{7Fl}{3} = \frac{Fl}{3}$$



(20)



REAKCIJE OSLOVNACA

$$\sum M_A = 0 \quad 2Fl - Fl + 2Fl + F \cdot 3l + R_B \cdot 2l = 0$$

$$R_B = -3F \quad R_B = 3F$$

$$\sum F_v = 0 \quad -2F + R_A - R_B + F = 0$$

$$R_A = 2F + R_B - F = 4F \quad R_A = 4F$$



$$\sum M_E^L = 0$$

$$\sum M_A^L = -2Fl$$

$$\sum M_C^L = -2F \cdot 2l + R_A \cdot l = -4Fl + 4Fl = 0$$

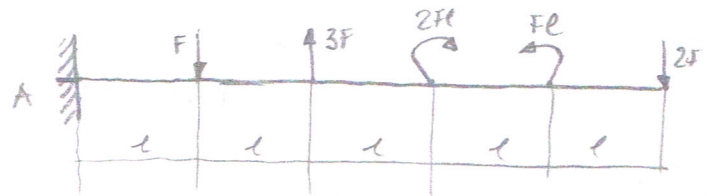
$$\sum M_B^d = Fl$$

$$\sum M$$



ODREDITI REAKCIJE I NACRTATI STATIČKE DIAGRAME ZA GREDU OPTEREĆENU KAO NA SLICI.
DATO JE $F \cdot l$

(1°)

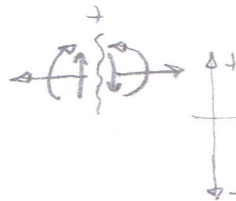


$$\sum F_v = 0 \quad -F + 3F - 2F + R_{AV} = 0$$

$$R_{AV} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad -2Fl + Fl - 2Fl + 3F(2l) - Fl + M_A = 0$$

$$M_A = 6Fl$$



$$\sum M_B^e = M_A = -6Fl$$

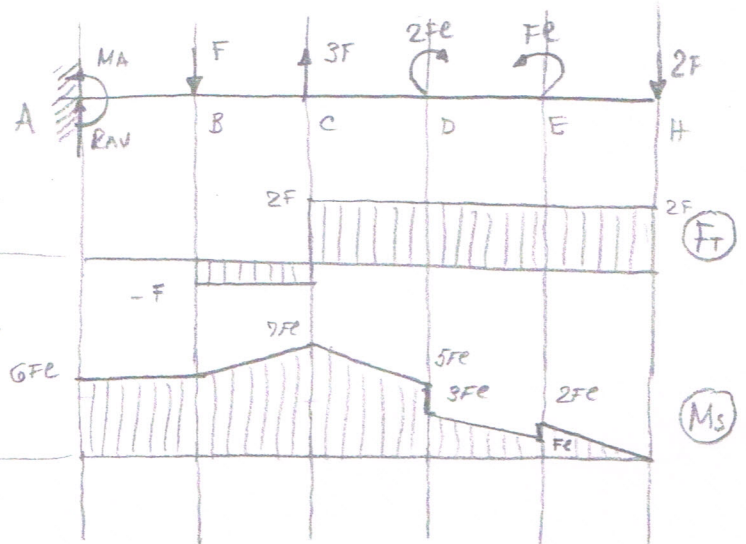
$$\sum M_C^e = -M_A - Fl = -7Fl$$

$$\sum M_D^e = -M_A - 2Fl + 3Fl = -5Fl$$

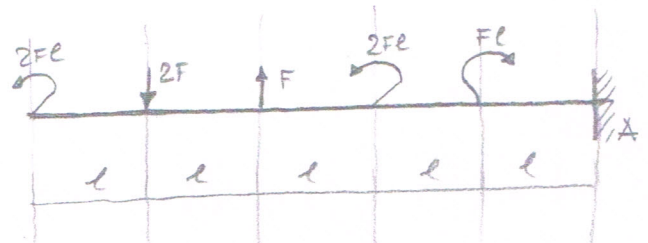
$$\sum M_E^e = -5Fl + 2Fl = -3Fl$$

$$M_{EH}^d = -2Fl$$

$$M_{EH}^d = -2Fl + Fl = -Fl$$



(2°)



$$\sum F_v = 0 \quad R_{AV} + F - 2F = 0 \quad R_{AV} = F$$

$$\sum M_A = 0 \quad 2Fl + 2F \cdot 4l - F \cdot 3l + 2Fl - Fl - M_A = 0$$

$$M_A = 8Fl$$

$$\sum M_A^d = -M_A = -8Fl$$

$$\sum M_B^d = -8Fl + R_{AV} \cdot l = -7Fl$$

$$\sum M_C^d = -7Fl - Fl = -8Fl$$

$$\sum M_D^d = -M_A - Fl + R_{AV} \cdot 2l = -8Fl - Fl + F \cdot 2l = -7Fl$$

$$\sum M_E^d = -7Fl + 2Fl = -5Fl$$

$$\sum M_H^e = -2Fl - 2F \cdot l = -4Fl$$

$$\sum M_H^e = -2Fl$$

$$\sum M_H^e = -2Fl$$

